УДК 513.513

ПРИБЛИЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ЭЛЛИПСОМ

О.Н. Вылегжанин, С.А. Рыбалка

Томский политехнический университет
E-mail: onv@am.tpu.ru

Обсуждаются вопросы получения оценок координат центра, длин полуосей эллипса и их ориентации относительно системы координат на основании результатов измерения координат точек, расположенных на его поверхности. Показано, что процедура получения оценок может быть сведена к последовательности задач линейного оценивания и определения собственных векторов и собственных значений симметричной вещественной матрицы.

В различных приложениях (см. например [1, 2]) возникает необходимость вычисления параметров эллипса (длин полуосей и их ориентации относительно выбранной системы координат) по результатам определения координат точек, находящихся на поверхности эллипса. Эту задачу можно также рассматривать как процедуру приближения множества наблюденных точек эллипсом. В настоящей работе предложен метод решения указанной задачи.

Каноническое уравнение эллипса размерности n, центр которого совпадает с точкой $\boldsymbol{x}_0$, имеет вид [3]:

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=1. \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{x}$ – вектор координат точки эллипса, а $\boldsymbol{W}$ – матрица вида:

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{V}$ – унитарная матрица поворота (матрица направляющих косинусов), а $\boldsymbol{A}$ – диагональная матрица:

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n^2} \end{vmatrix},$$

где a_i – длина соответствующей полуоси эллипса, где i=1,2,...,n. Таким образом, выражение (2) соответствует разложению матрицы $\boldsymbol{W}$ по собственным числам и собственным векторам.

Разлагая (1) в сумму квадратичных форм, получим:

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_0=1, \quad (3)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_ix_j-2\sum_{i=1}^{n}x_ib_i+C=1, \quad (4)$$

т. е. уравнение, линейное относительно $k=n(n+1)/2+n+1$ неизвестных (в силу симметричности $\boldsymbol{W}$), из которых первые $n(n+1)/2$ суть элементы w_{ij} матрицы $\boldsymbol{W}$, следующие n неизвестных $b_i=\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_{0j}$, а $C=\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_0$.

Приведем выражение (4) к виду:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_ix_j-2\sum_{i=1}^{n}x_ib_i=1-C. \quad (5)$$

Если имеются координаты m ($m\geq k$) точек, принадлежащих поверхности эллипса, то, составив для каждой из них уравнение вида (5), получим систему уравнений. Решая эту систему с единичным вектором в правой части, что равносильно умножению обеих частей системы на $1/(1-C)$, получим оценки коэффициентов $\dot{w}_{ij}=w_{ij}/(1-C)$ и $\dot{b}_i=b_i/(1-C)$, из которых сформируем матрицу $\dot{\boldsymbol{W}}=\boldsymbol{W}/(1-C)$ и $\dot{b}=b/(1-C)$ вектор соответственно. Из определения b_i следует, что $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_0$, поэтому, оценка $\boldsymbol{x}_0$ может быть получена в виде:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_0=\dot{\boldsymbol{W}}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{b}}.$$

При разложении матрицы $\dot{\boldsymbol{W}}$ на собственные векторы и собственные числа получим матрицу поворота $\boldsymbol{V}$ и диагональную матрицу $\dot{A}=A/(1-C)$. Вычислим сумму квадратичных форм (3), подставив вместо матрицы $\boldsymbol{W}$ полученную при решении системы (5) матрицу $\dot{\boldsymbol{W}}$:

$$\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_0^T\dot{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{x}_0=$$
$$=(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_0)/(1-C),$$

а, учитывая (3), получим:

$$\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_0^T\dot{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{x}_0=1/(1-C). \quad (6)$$

Вышеприведенные рассуждения обосновывают следующий алгоритм определения параметров эллипса по координатам набора точек, принадлежащих его поверхности:

- измерить координаты m точек, расположенных на поверхности эллипса;
- составить из них систему уравнений вида (5);
- решить полученную систему линейных уравнений с единичным вектором в качестве правой части;
- составить из первых $n(n+1)/2$ элементов вектора решения системы матрицу $\dot{\boldsymbol{W}}$, а из следующих n элементов – вектор $\dot{\boldsymbol{b}}$;
- получить оценку вектора координат центра эллипса в виде $\hat{\boldsymbol{x}}_0=\dot{\boldsymbol{W}}^{-1}\cdot\dot{\boldsymbol{b}}$;
- вычислить матрицу собственных векторов и вектор собственных значений матрицы $\dot{\boldsymbol{W}}$;

- получить оценку матрицы поворота эллипса относительно выбранной системы координат как транспонированную матрицу собственных векторов матрицы $\dot{\boldsymbol{W}}$;
- вычислить сумму квадратичных форм $\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_0^T\dot{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{x}_0$, и, деля эту сумму на элементы вектора собственных значений матрицы $\dot{\boldsymbol{W}}$, определить длины полуосей эллипса, как корни квадратные из полученных величин.

Для демонстрации работы алгоритма задали трехмерный эллипс с полуосями, равными 235, 181 и 27. Были вычислены координаты 20 точек, случайным образом расположенных на поверхности эллипса. К этим координатам был добавлен вектор координат центра эллипса $\boldsymbol{x}_0$=(10, –5, 7). Затем эти координаты были преобразованы с использованием матрицы поворота вида:

$$\boldsymbol{T}=\begin{vmatrix}0{,}766 & 0{,}643 & 0\\ -0{,}583 & 0{,}694 & 0{,}423\\ -0{,}272 & 0{,}324 & 0{,}906\end{vmatrix},$$

что соответствует сумме поворота системы координат на 25° в плоскости YZ и на 40° в плоскости XY. Исходные и преобразованные координаты точек представлены в табл. 1.

Из преобразованных координат была составлена система линейных уравнений вида (5), матрица которой приведена в табл. 2.

Полученная в результате решения системы методом наименьших квадратов матрица $\dot{\boldsymbol{W}}$ равна:

$$\dot{\boldsymbol{W}}=10^{-4}\cdot\begin{vmatrix}1{,}235 & -1{,}254 & -3{,}337\\ -1{,}254 & 1{,}677 & 3{,}977\\ -3{,}337 & 3{,}977 & 1{,}144\end{vmatrix}.$$

Матрица собственных векторов и вектор собственных значений матрицы $\dot{\boldsymbol{W}}$ равны соответственно:

$$\boldsymbol{V}=\begin{vmatrix}0{,}766 & 0{,}643 & -3{,}8\cdot10^{-15}\\ 0{,}583 & -0{,}694 & 0{,}423\\ -0{,}272 & 0{,}324 & 0{,}906\end{vmatrix}$$

и Å=($1{,}82005\cdot10^{-5}$, $3{,}084733\cdot10^{-5}$, $1{,}38626799\cdot10^{-3}$).

Обратные значения корней квадратных из собственных чисел равны 233,766; 180,049 и 26,858.

Таблица 1. *Координаты точек эллипса*

Исходные			Преобразованные		
x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
– 165,151	128,758	0,215	– 191,581	– 21,694	– 47,221
– 22,412	60,696	25,306	– 49,402	30,926	4,284
49,491	151,055	– 13,745	– 36,353	127,236	– 69,296
– 32,692	103,658	21,813	– 81,356	53,015	– 17,039
– 79,074	51,832	– 24,221	– 74,190	– 27,684	– 36,857
– 105,965	15,388	23,990	– 86,655	– 54,663	22,239
1,162	– 44,458	– 26,173	43,900	– 43,592	2,068
50,405	46,042	25,462	14,873	67,609	10,618
196,270	– 15,454	14,669	165,369	115,180	26,826
– 119,263	58,391	21,572	– 121,237	– 34,137	1,874
164,842	– 128,339	– 1,948	211,571	11,226	59,473
– 154,522	– 58,596	18,369	– 79,225	– 139,060	48,411
12,992	180,438	1,513	– 85,576	129,114	– 67,885
– 227,324	28,733	– 5,336	– 179,429	– 132,900	– 9,979
98,946	123,644	– 16,111	18,144	139,228	– 59,856
– 100,598	47,553	23,347	– 101,108	– 29,090	8,063
– 21,164	171,643	8,217	– 108,437	103,223	– 58,093
– 219,889	– 6,678	9,473	– 157,128	– 147,912	18,408
12,746	– 36,313	– 26,410	48,093	– 30,568	– 1,590
233,026	6,297	– 3,363	185,754	148,069	1,291

Таблица 2. *Матрица системы линейных уравнений*

$3{,}670\cdot10^{4}$	470,624	$2{,}230\cdot10^{3}$	$4{,}156\cdot10^{3}$	$9{,}047\cdot10^{3}$	$1{,}024\cdot10^{3}$	−191,581	−21,694	−47,221
$2{,}441\cdot10^{3}$	956,393	18,353	$-1{,}528\cdot10^{3}$	−211,638	132,485	−49,402	30,926	4,284
$1{,}322\cdot10^{3}$	$1{,}619\cdot10^{4}$	$4{,}802\cdot10^{3}$	$-4{,}625\cdot10^{3}$	$2{,}519\cdot10^{3}$	$-8{,}817\cdot10^{3}$	−36,353	127,236	−69,296
$6{,}619\cdot10^{3}$	$2{,}811\cdot10^{3}$	290,319	$-4{,}313\cdot10^{3}$	$1{,}386\cdot10^{3}$	−903,301	−81,356	53,015	−17,039
$5{,}504\cdot10^{3}$	766,419	$1{,}358\cdot10^{3}$	$2{,}054\cdot10^{3}$	$2{,}734\cdot10^{3}$	$1{,}020\cdot10^{3}$	−74,190	−27,684	−36,857
$7{,}509\cdot10^{3}$	$2{,}988\cdot10^{3}$	494,575	$4{,}737\cdot10^{3}$	$-1{,}927\cdot10^{3}$	$-1{,}216\cdot10^{3}$	−86,655	−54,663	22,239
$1{,}927\cdot10^{3}$	$1{,}900\cdot10^{3}$	4,278	$-1{,}914\cdot10^{3}$	90,801	−90,165	43,900	−43,592	2,068
221,212	$4{,}571\cdot10^{3}$	112,734	$1{,}006\cdot10^{3}$	157,918	717,845	14,873	67,609	10,618
$2{,}735\cdot10^{4}$	$1{,}327\cdot10^{4}$	719,615	$1{,}905\cdot10^{4}$	$4{,}436\cdot10^{3}$	$3{,}090\cdot10^{3}$	165,369	115,180	26,826
$1{,}470\cdot10^{4}$	$1{,}165\cdot10^{3}$	3,512	$4{,}139\cdot10^{3}$	−227,212	−63,977	−121,237	−34,137	1,874
$4{,}476\cdot10^{4}$	126,020	$3{,}537\cdot10^{3}$	$2{,}375\cdot10^{3}$	$1{,}258\cdot10^{4}$	667,635	211,571	11,226	59,473
$6{,}277\cdot10^{3}$	$1{,}934\cdot10^{4}$	$2{,}344\cdot10^{3}$	$1{,}102\cdot10^{4}$	$-3{,}835\cdot10^{3}$	$-6{,}732\cdot10^{3}$	−79,225	−139,060	48,411
$7{,}323\cdot10^{3}$	$1{,}667\cdot10^{4}$	$4{,}608\cdot10^{3}$	$-1{,}105\cdot10^{4}$	$5{,}809\cdot10^{3}$	$-8{,}765\cdot10^{3}$	−85,576	129,114	−67,885
$3{,}219\cdot10^{4}$	$1{,}766\cdot10^{4}$	99,586	$2{,}385\cdot10^{4}$	$1{,}791\cdot10^{3}$	$1{,}326\cdot10^{3}$	−179,429	−132,900	−9,979
329,190	$1{,}938\cdot10^{4}$	$3{,}583\cdot10^{3}$	$2{,}526\cdot10^{3}$	$-1{,}086\cdot10^{3}$	$-8{,}334\cdot10^{3}$	18,144	139,228	−59,856
$1{,}022\cdot10^{4}$	846,220	65,012	$2{,}941\cdot10^{3}$	−815,228	−234,551	−101,108	−29,090	8,063
$1{,}176\cdot10^{4}$	$1{,}066\cdot10^{4}$	$3{,}375\cdot10^{3}$	$-1{,}119\cdot10^{4}$	$6{,}299\cdot10^{3}$	$-5{,}997\cdot10^{3}$	−108,437	103,223	−58,093
$2{,}469\cdot10^{4}$	$2{,}188\cdot10^{4}$	338,854	$2{,}324\cdot10^{4}$	$-2{,}892\cdot10^{3}$	$-2{,}723\cdot10^{3}$	−157,128	−147,912	18,408
$2{,}313\cdot10^{3}$	934,392	2,527	$-1{,}470\cdot10^{3}$	−76,453	48,593	48,093	−30,568	−1,590
$3{,}450\cdot10^{4}$	$2{,}192\cdot10^{4}$	1,666	$2{,}750\cdot10^{4}$	239,774	191,131	185,754	148,069	1,291

Столбцы матрицы в таблице соответствуют следующим регрессорам: x_1^2, x_2^2, x_3^2, $x_1{*}x_2$, $x_1{*}x_3$, $x_2{*}x_3$, x_1, x_2, x_3.

Таблица 3. Рассчитанные координаты точек эллипса при переносе начала координат в его центр

x_1	x_2	x_3
−191,581	−21,694	−47,221
−49,402	30,926	4,284
−36,353	127,236	−69,296
−81,356	53,015	−17,039
−74,190	−27,684	−36,857
−86,655	−54,663	22,239
43,900	−43,592	2,068
14,873	67,609	10,618
165,369	115,180	26,826
−121,237	−34,137	1,874
211,571	11,226	59,473
−79,225	−139,060	48,411
−85,576	129,114	−67,885
−179,429	−132,900	−9,979
18,144	139,228	−59,856
−101,108	−29,090	8,063
−108,437	103,223	−58,093
−157,128	−147,912	18,408
48,093	−30,568	−1,590
185,754	148,069	1,291

Вычисленное по формуле (6) значение множителя $1/(1-C)$ равно 1,010702696321, а полученные с использованием этого множителя значения полуосей эллипса равны соответственно 235,013; 181,010; 27,002, т. е. практически совпадают с заданными.

Таким образом, показано, что по результатам определения координат точек, принадлежащих его поверхности, можно определить параметры эллипса, находящегося в общем положении. Предложен алгоритм получения соответствующих оценок. Результаты решения численного примера подтверждают работоспособность предложенного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ржанов А.В., Свиташев К.К., Семененко А.И. и др. Основы эллипсометрии. – Новосибирск: Наука, 1974. – 253 с.
2. Шолпо Л.Е. Использование магнетизма горных пород для решения геологических задач. – Л.: Недра, 1977. – 187 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. – 837 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

УДК 621.397:621.391.883.2